CAPÍTULO

5

La derivada

[1]

5.3 Velocidad instantánea

Si un móvil recorre 150 km en 2 horas, su velocidad promedio es

$$\overline{v} = v_{\text{media}} \overset{\text{def}}{=} \frac{\text{espacio recorrido}}{\text{tiempo empleado}} = \frac{150\,\text{km}}{2\,h} = 75\,\text{km/h}\,.$$

Pero no conocemos la velocidad que lleva el móvil en un punto arbitrario de su trayectoria.
Pensemos ahora que $s = s(t)$ es una función que le asigna a cada tiempo t un punto en un eje, es decir, la función de posición de un móvil.
Para $t \neq a$, la velocidad promedio que tiene el móvil en el intervalo de tiempo $[a, t]$ o bien $[t, a]$ es

$$\overline{v} = v_{\text{media}} = \frac{s(t) - s(a)}{t - a} = \frac{s(a) - s(t)}{a - t}\,.$$

Parece natural pensar que mientras más próximo esté t al número a, la velocidad promedio en el intervalo entre a & t se parecerá más a la velocidad que lleva el móvil en el instante a. Ejemplifiquemos numéricamente esta idea:

Ejemplo 5.3.1 *Sea $s(t) = 5t^2$ la posición en metros de un cuerpo t segundos después de haber partido del reposo.*

▼ Si $a = 2$ s, entonces $s(a) = 5a^2 = 5(2)^2 = 20$ m. Además:

[1] canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

Si	*entonces*				
t	$s(t)$	$[a,t]$	$t-a$	$s(t)-s(a)$	$\bar{v}=\dfrac{s(t)-s(a)}{t-a}$
3	45	$[2,3]$	1	25	25 m/s
2.5	31.25	$[2,2.5]$	0.5	11.25	22.5 m/s
2.2	24.20	$[2,2.2]$	0.2	4.20	21 m/s
2.1	22.05	$[2,2.1]$	0.1	2.05	20.5 m/s
2.01	20.2005	$[2,2.01]$	0.01	0.2005	20.05 m/s
2.001	20.020005	$[2,2.001]$	0.001	0.020005	20.005 m/s

Notamos que cuanto más se acerca t al número $a=2$, la velocidad promedio $\bar{v}$ se acerca cada vez más al número $v=20$. Es decir, $\bar{v}\to 20$ m/s cuando $t\to 2$ s.
Intuitivamente podemos decir que la velocidad instantánea $v(t)$ en $t=2$ s es $v=20$ m/s. □

- Definimos la velocidad instantánea en a, denotada por $v(a)$, como

$$v(a)\stackrel{\text{def}}{=}\lim_{t\to a}\frac{s(t)-s(a)}{t-a}=s'(a)$$

o bien

$$v(a)\stackrel{\text{def}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{s(a+h)-s(a)}{h}=s'(a)\,.$$

Ejemplifiquemos esta definición.

Ejemplo 5.3.2 *Sea $s(t)=8+20t-5t^2$ la posición (en metros) de un móvil en el instante (segundo) $t\geq 0$. Determinar la velocidad instantánea $v(t)$ del móvil en el instante:*

1. *t_0 arbitrario;*
2. *$t_0=1$ s;*
3. *$t_0=2$ s;*
4. *$t_0=3$ s.*

▼

1. Ya que $v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$, entonces

$$
\begin{aligned}
v(t_0) &= \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{(8 + 20t - 5t^2) - (8 + 20t_0 - 5t_0^2)}{t - t_0} = \\
&= \lim_{t \to t_0} \frac{8 + 20t - 5t^2 - 8 - 20t_0 + 5t_0^2}{t - t_0} = \\
&= \lim_{t \to t_0} \frac{20(t - t_0) - 5(t^2 - t_0^2)}{t - t_0} = \\
&= \lim_{t \to t_0} \frac{20(t - t_0) - 5(t - t_0)(t + t_0)}{t - t_0} = \\
&= \lim_{t \to t_0} [20 - 5(t + t_0)] = 20 - 5(t_0 + t_0) = 20 - 10t_0\,.
\end{aligned}
$$

2. $v(t_0 = 1) = 20 - 10(1) = 10 \;\Rightarrow\; v(1) = 10$ m/s.

3. $v(t_0 = 2) = 20 - 10(2) = 0 \;\Rightarrow\; v(2) = 0$ m/s.

4. $v(t_0 = 3) = 20 - 10(3) = -10 \;\Rightarrow\; v(3) = -10$ m/s.

   El signo $-$ indica que el móvil se desplaza en sentido contrario al del eje.

□

Ejemplo 5.3.3 *Calcular la velocidad instantánea de una partícula cuya posición está dada por la función:* $s(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ *donde* a, b, c & d *son constantes.*

▼ La velocidad instantánea en cualquier tiempo t_0 es

$$
\begin{aligned}
v(t_0) &= \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{(at^3 + bt^2 + ct + d) - (at_0^3 + bt_0^2 + ct_0 + d)}{t - t_0} = \\
&= \lim_{t \to t_0} \frac{a(t^3 - t_0^3) + b(t^2 - t_0^2) + c(t - t_0)}{t - t_0} = \\
&= \lim_{t \to t_0} \frac{a(t - t_0)(t^2 + tt_0 + t_0^2) + b(t - t_0)(t + t_0) + c(t - t_0)}{t - t_0} = \\
&= \lim_{t \to t_0} \left[a(t^2 + t_0t + t_0^2) + b(t + t_0) + c\right] = \\
&= a(t_0^2 + t_0^2 + t_0^2) + b(t_0 + t_0) + c = \\
&= a(3t_0^2) + b(2t_0) + c\,.
\end{aligned}
$$

Esto es, en cualquier instante $t \geq 0$

$$
v(t) = a(3t^2) + b(2t) + c = 3at^2 + 2bt + c\,.
$$

□

Razón de cambio

- Ahora bien la función $s = s(t)$ puede tener cualquier otra interpretación, por ejemplo, puede ser la cantidad de una sustancia, el número de individuos que hay en cierta población, la carga de un capacitor eléctrico, o bien el costo de producir algo, etc. La diferencia $s(t) - s(a)$ es el incremento de tal cantidad o tal número o tal carga, o tal costo, etc. La velocidad promedio $\overline{v}$ con que cambia la cantidad considerada será la razón promedio de cambio o bien razón media de cambio de la función $s = s(t)$ entre a & t.

  Es decir,

  $$\overline{v} = v_{\text{media}} = \frac{s(t) - s(a)}{t - a} = \frac{s(a + h) - s(a)}{h}$$

  y la razón de cambio de $s(t)$ con respecto a t o bien la velocidad de cambio de $s(t)$ será la velocidad instantánea, o sea, la derivada de $s(t)$.

  Así pues si P es un punto que se mueve sobre un eje y $s = s(t)$ es su función de posición, entonces la velocidad instantánea $v(t)$ de P es la derivada $s'(t)$ (de la función de posición); luego $v(t)$ es la razón de cambio de $s(t)$ con respecto al tiempo t; o simplemente la velocidad de cambio de $s(t)$.

  Así también la aceleración $a(t)$ de P en el instante t se define como la velocidad de cambio de la velocidad instantánea $v(t)$; es decir, es la derivada de la derivada o segunda derivada de la función de posición $s(t)$ que denotamos por $s''(t)$. Esto es,

  $$a(t) \stackrel{\text{def}}{=} v'(t) = [s'(t)]' = s''(t) .$$

Ejemplo 5.3.4 *Si $s(t) = t^2 - 4t - 5$ es la función de posición de una partícula que se mueve en un eje horizontal con sentido de izquierda a derecha.*

1. *¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $s(t) = 0$?*
2. *¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $s(t) = 7$?*

▼

1. ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $s(t) = 0$?

   $$s(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow (t - 5)(t + 1) = 0 \Rightarrow t = 5 \text{ o bien } t = -1 .$$

   Es decir, la partícula pasa por el origen en el instante $t = 5$ ya que $t = -1 < 0$ pertenece en todo caso al pasado.

   La velocidad de la partícula para todo t es

   $$v(t) = s'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t + h) - s(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(t + h)^2 - 4(t + h) - 5] - (t^2 - 4t - 5)}{h} =$$
   $$= \lim_{h \to 0} \frac{2th + h^2 - 4h}{h} = \lim_{h \to 0} (2t + h - 4) = 2t - 4 .$$

   Así calculamos la velocidad para $t = 5$

   $$v(5) = 2(5) - 4 = 6 .$$

   Para $t = 5$ la partícula se moverá hacia la derecha.

2. ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $s(t) = 7$?

$$s(t) = 7 \;\Leftrightarrow\; t^2 - 4t - 5 = 7 \;\Leftrightarrow\; t^2 - 4t - 12 = 0\,.$$

Vamos a encontrar las raíces de esta cuadrática:

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(-12)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2} = \begin{cases} \dfrac{4+8}{2} = 6 \\ \dfrac{4-8}{2} = -2\,. \end{cases}$$

Así calculamos la velocidad para el tiempo $t = 6$

$$v(6) = 2(6) - 4 = 8$$

Para $t = 6$ la partícula se moverá hacia la derecha.

El instante $t = -2 < 0$ no se considera.

□

Ejemplo 5.3.5 *Si $s(t) = t^3 - 3t^2 + 8$ es la función de posición de una partícula que se mueve en un eje horizontal dirigido de izquierda a derecha.*

1. *¿Cuál es la posición de la partícula cuando $v(t) = 0$?*
2. *¿Cuál es la posición de la partícula cuando $a(t) = 0$?*

▼

1. La velocidad instantánea es, :

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t\,.$$

Ahora bien

$$v(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; 3t^2 - 6t = 0 \;\Leftrightarrow\; 3t(t-2) = 0 \;\Rightarrow\; t = 0 \text{ o bien } t = 2\,.$$

Calculamos la posición de la partícula en esos tiempos:

$$s(0) = 8\,.$$

$$s(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 + 8 = 8 - 12 + 8 = 4\,.$$

2. Observamos que:

$$a(t) = v'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(t+h)^2 - 6(t+h) - 3t^2 + 6t}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{6th + 3h^2 - 6h}{h} = \lim_{h \to 0}(6t + 3h - 6) = 6t - 6\,.$$

También $a(t) = 6t - 6$.

Por consiguiente

$$a(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; 6t - 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; t = 1\,.$$

Calculamos la posición de la partícula en ese tiempo:

$$s(1) = 1^3 - 3(1)^2 + 8 = 1 - 3 + 8 = 6\,.$$

□

Ejemplo 5.3.6 *Dos partículas se mueven a lo largo de un eje horizontal. Al final de t segundos sus distancias a partir del origen están dadas por*

$$s_1(t) = 4t - 3t^2 \ \& \ s_2(t) = t^2 - 2t, \textit{ respectivamente}.$$

1. *¿Cuándo tienen la misma velocidad?*
2. *¿Cuándo tienen la misma rapidez?.*
   (La rapidez de una partícula es el valor absoluto o magnitud de su velocidad.)
3. *¿Cuándo tienen la misma posición?*

▼

1. Calculamos la velocidad de ambas partículas:

$$\begin{aligned}
v_1(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{s_1(t+h) - s_1(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4(t+h) - 3(t+h)^2 - 4t + 3t^2}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{4h - 6ht}{h} = \lim_{h\to 0}(4 - 6t) = 4 - 6t; \\
v_1(t) &= s_1'(t) = 4 - 6t\,. \\
v_2(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{(t+h)^2 - 2(t+h) - t^2 + 2t}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2th - 2h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2t + h - 2) = 2t - 2\,; \\
v_2(t) &= s_2'(t) = 2t - 2\,.
\end{aligned}$$

Así, $v_1(t) = v_2(t) \ \Leftrightarrow \ 4 - 6t = 2t - 2 \ \Leftrightarrow \ 6 = 8t \ \Leftrightarrow \ t = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ s.

2.

$$|\, v_1(t)\,| = |\, v_2(t)\,| \ \Leftrightarrow \ |\, 4 - 6t\,| = |\, 2t - 2\,|\,.$$

$t = 1$ no satisface esta última ecuación con valores absolutos.

$$\begin{aligned}
&\text{Si } t \neq 1 \ \Rightarrow t - 1 \neq 0 \ \Rightarrow \\
&\quad \Rightarrow |\, 4 - 6t\,| = |\, 2t - 2\,| \ \Leftrightarrow \ \frac{|\, 4 - 6t\,|}{|\, 2t - 2\,|} = 1 \ \Leftrightarrow \\
&\quad \Leftrightarrow \left| \frac{4 - 6t}{2t - 2} \right| = 1 \ \Leftrightarrow \ \frac{4 - 6t}{2t - 2} \pm 1 \ \Leftrightarrow \\
&\quad \Leftrightarrow 4 - 6t = \pm(2t - 2) \ \Leftrightarrow \ 4 - 6t = 2t - 2 \text{ o bien } 4 - 6t = -2t + 2 \ \Leftrightarrow \\
&\quad \Leftrightarrow 8t = 6 \text{ o bien } 4t = 2 \ \Leftrightarrow \ t = \frac{6}{8} \text{ o bien } t = \frac{2}{4} \ \Leftrightarrow \\
&\quad \Leftrightarrow t = \frac{3}{4} \text{ o bien } t = \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

3.

$$s_1(t) = s_2(t) \Leftrightarrow 4t - 3t^2 = t^2 - 2t \Leftrightarrow 4t^2 - 6t = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2t(2t-3) = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ o bien } t = \frac{3}{2}.$$

□

Ejemplo 5.3.7 *Una partícula se mueve en línea recta y su posición está dada por la función*

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

donde $t \geq 0$ se mide en segundos y s en metros.

1. *Calcular la velocidad de la partícula en cualquier instante t y en $t = 2$ s.*
2. *¿Cuándo la partícula está en reposo?*
3. *¿Cuándo la partícula se mueve hacia la derecha?*
4. *Calcular la distancia total recorrida durante los primeros 5 s.*
5. *Calcular la aceleración en cualquier instante t y después de 3 s.*
6. *¿Cuándo la aceleración de la partícula es nula?*

▼

1. La velocidad instantánea en $t \geq 0$ es (de acuerdo con el ejemplo 5.3.3)

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = f'(t) = 3t^2 - 12t + 9 \text{ m/s}.$$

   Entonces en $t = 2$ s la velocidad instantánea es

$$v(2) = f'(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = 12 - 24 + 9 = -3 \text{ m/s}.$$

2. La partícula está en reposo cuando $v(t) = 0$, lo cual sucede cuando

$$\begin{aligned} v(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3(t^2 - 4t + 3) = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3(t-1)(t-3) = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t - 1 = 0 \\ t - 3 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

   Es decir, la partícula está en reposo cuando $t = 1$ y cuando $t = 3$.

3. La partícula se mueve hacia la derecha cuando $v(t) > 0$, lo que sucede cuando

$$\begin{aligned} v(t) = 3t^2 - 12t + 9 > 0 \;&\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\; 3(t^2 - 4t + 3) > 0 \;&\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\; t^2 - 4t + 3 > 0 \;&\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\; (t-1)(t-3) > 0\,. \end{aligned}$$

Desigualdad que se cumple cuando

$$\begin{array}{rcr} t-1<0 \;\&\; t-3<0 & \text{o bien} & t-1>0 \;\&\; t-3>0\,; \\ t<1 \;\&\; t<3 & \text{o bien} & t>1 \;\&\; t>3\,; \\ t<1 & \text{o bien} & t>3\,. \end{array}$$

Es decir, cuando

$$0 \le t < 1 \qquad \text{o bien} \qquad t > 3\,.$$

Esto es, hay movimiento hacia la derecha en los intervalos de tiempo

$$[0, 1) \text{ y } (3, +\infty)\,.$$

4. Para calcular la distancia total recorrida durante los primeros 5 s debemos tomar en cuenta que:

   a. En $t = 0$, la posición es $f(0) = 0$.
   b. Cuando $0 < t < 1$, la partícula se mueve hacia la derecha y se detiene en $t = 1$ cuando su posición es $f(1) = 4$ m, lo que indica que durante el primer segundo la partícula recorre 4 m.
   c. Cuando $1 < t < 3$, la partícula se mueve hacia la izquierda y se detiene en $t = 3$, cuando su posición es $f(3) = 0$, lo que indica que en este intervalo de tiempo la partícula retrocede desde $f(1) = 4$ m hasta $f(3) = 0$ m, lo cual nos permite afirmar que entre $t = 1$ s y $t = 3$ s, la partícula recorrió de nuevo 4 m.
   d. Finalmente, cuando $3 < t \le 5$, la partícula se mueve hacia la derecha desde la posición $f(3) = 0$ hasta la posición $f(5) = 20$ m, lo que indica que en el intervalo de tiempo $3 < t \le 5$ la partícula recorre 20 m.

   Por lo tanto, la distancia total recorrida durante los primeros 5 s es: $d = 4 + 4 + 20$ m $= 28$ m.

5. La aceleración (instantánea) es la rapidez de cambio de la velocidad (instantánea), por lo cual

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dt}(3t^2 - 12t + 9) = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{3(t+h)^2 - 12(t+h) + 9 - 3t^2 + 12t - 9}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{6th + h^2 - 12h}{h} = \lim_{h\to 0}(6t + h - 12) = 6t - 12\,. \end{aligned}$$

(Medida en $\mathrm{m/s^2}$ es la aceleración en el instante (segundo) $t \ge 0$.)

Entonces en $t = 3$ segundos la aceleración instantánea es $a(3) = 6\cdot 3 - 12 = 18 - 12 = 6\ \mathrm{m/s^2}$.

6. La aceleración de la partícula es nula cuando $a(t) = 0$, lo que sucede cuando

$$a(t) = 6t - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; 6t = 12 \;\Leftrightarrow\; t = 2\,.$$

Es decir, la aceleración nula ocurre después de $t = 2$ s de haberse iniciado el movimiento; y precisamente en el punto medio del intervalo $1 \le t \le 3$, donde la partícula pasa de una velocidad $v(1) = 0$ a la velocidad $v(3) = 0$.

□

Ejercicios 5.3.1 *Soluciones en la página 12*

1. Si se lanza verticalmente un objeto hacia arriba desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 320 pies/s, entonces su distancia h arriba del suelo está dada por

$$h(t) = -16t^2 + 320t\,.$$

   a. Encuentre las velocidades promedio durante los intervalos $[3, 4]$, $[3.5, 4]$, $[4, 5]$, $[4, 4.5]$.
   b. Calcule $v(4)$, usando la definición de la derivada.

2. En un movimiento rectilíneo, la posición de una partícula a los t segundos es $s(t) = 2t^2 - 3t + 1$.
   a. Encontrar la velocidad promedio en el recorrido efectuado entre los 3 y 5 s.
   b. Encontrar la velocidad instantánea a los 3 s. Obtenerla mediante la definición de la derivada.

3. En un movimiento rectilíneo, la posición de un automóvil a las t horas es:

$$s(t) = 50t - \frac{7}{t + 1}\ \text{km}.$$

   a. ¿Cuál es la velocidad promedio durante las 2 primeras horas?
   b. ¿Cuál es la velocidad instantánea a las 2 horas? Obtenerla mediante la definición de la derivada.

4. Un caracol baja por una pared. Su posición a las t horas está dada por $s(t) = 1 - 0.2\sqrt{t}$ m. Usando la definición de la derivada, calcular su velocidad instantánea para $t = 4$ h.

5. Se deja caer una pelota desde lo alto de un edificio; la posición de la pelota en el tiempo t es

$$s(t) = 78.4 - 4.9t^2.$$

   a. Calcule la velocidad instantánea en el tiempo $t = 4$, usando la definición de la derivada.
   b. Calcule la posición de la pelota en $t = 4$.
   c. Dé una interpretación de su resultado.

6. Un helicóptero se está elevando verticalmente desde el suelo. La distancia del helicóptero al suelo t segundos después del despegue es $s(t)$ metros, donde

$$s(t) = t^2 + t\,.$$

   a. ¿En qué instante se encuentra el helicóptero a 20 m?
   b. Use la definición de la derivada para determinar la velocidad instantánea del helicóptero cuando éste se encuentra a 20 m.

7. Un objeto se lanza hacia arriba según la ley de movimiento:

$$s(t) = 15t - 4.9t^2\,,$$

donde $s(t)$ denota la posición en metros del objeto a los t segundos. Calcular la velocidad instantánea del objeto a los 2 s.

8. Se lanza una pelota al aire desde un puente. La posición de la pelota en el tiempo $t \geq 0$ está dada por

$$y(t) = -16t^2 + 50t + 36\,.$$

   a. ¿Cuál es la altura del puente?
   b. ¿Cuál es la velocidad instantánea de la pelota cuando se encuentra a 70 pies sobre el suelo?

9. El desplazamiento en metros de una partícula que se mueve en línea recta está dado por

$$s(t) = t^2 - 6t + 10\,,$$

donde el tiempo t se mide en segundos.

   a. Calcule la velocidad instantánea en el tiempo t usando la definición de la derivada.
   b. Determine la velocidad instantánea cuando la posición de la partícula es 10 m.

10. Se lanza una pelota hacia arriba. La función de posición de la pelota en el tiempo t es:

$$s(t) = 5t - 10t^2\,.$$

   a. Calcule la velocidad instantánea (v) en el tiempo $t = 1/4$ usando la definición de la derivada.
   b. Calcule la posición de la pelota en el instante $t = 1/4$.
   c. Dé una interpretación de sus resultados.

11. La ley de Newton de la gravitación afirma que la magnitud F de la fuerza ejercida por un cuerpo de masa m sobre otro de masa M es:

$$F = \frac{GmM}{r^2}\,,$$

donde G es la constante gravitacional y donde r es la distancia entre los cuerpos.

   a. Si los cuerpos se están moviendo, encuentre $\dfrac{dF}{dr}$ y explique su significado.
   b. Suponga que se sabe que la Tierra atrae un objeto con una fuerza que disminuye a razón de 2 N/km, cuando $r = 20\,000$ km. ¿Con qué rapidez cambia esa fuerza cuando $r = 10\,000$ km?

12. Si se lanza verticalmente un objeto hacia arriba desde el nivel del suelo, con una velocidad inicial de 320 pies/s, entonces su distancia h arriba del suelo después de t segundos está dada por

$$h(t) = -16t^2 + 320t\ .$$

   a. ¿Para qué valores de t el objeto estará a más de 1 536 pies sobre el suelo?
   b. Calcule $v(4)$ usando la definición de velocidad instantánea.
   c. ¿A qué velocidad impactará contra el suelo y en qué momento?

13. Si se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de 25 m/s, entonces su altura después de t segundos es

$$s(t) = -5t^2 + 25t\ .$$

   a. Determine el dominio de la función.
   b. ¿Para qué valores de t la pelota se encuentra a más de 30 m del suelo?
   c. ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando está a 20 m?

Ejercicios 5.3.1 *Velocidad instantánea, página 9*

1. a. La velocidad promedio en $[3, 4]$ es 208 pies/s;
   la velocidad promedio en $[3.5, 4]$ es 200 pies/s;
   la velocidad promedio en el $[4, 5]$ es 176 pies/s;
   la velocidad promedio en el $[4, 4.5]$ es 184 pies/s;
   b. $v(4) = 192$ pies/s .
2. a. 13 unidades/s;
   b. $v(3) = 9$ unidades/s .
3. a. $52.\overline{3}$ km/h;
   b. $50.\overline{7}$ km/h .
4. -0.05 m/h.
5. a. La velocidad en el instante $t = 4$ es -39.2;
   b. $s(4) = 0$;
   c. al llegar al suelo tiene una velocidad de -39.2.
6. a. Cuando $t = 4$ s;
   b. $v(4) = 9$ m/s.
7. -4.6 m/s .
8. a. 36 pies;
   b. $v_1 = 18$ pies/s (de subida);
   y $v_2 = -18$ pies/s (de bajada).
9. a. $v(t) = 2t - 6$;
   b. $v(0) = -6$ m/s;
   $v(6) = 6$ m/s .
10. a. $v\left(\dfrac{1}{4}\right) = 0$;
    b. $s\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{5}{8}$;
    c. en $t = \dfrac{1}{4}$ es la altura máxima de la pelota, pues su velocidad instantánea en $t = \dfrac{1}{4}$ es $v = 0$.
11. a. $\dfrac{dF}{dr} = -\dfrac{2GmM}{r^3}$;
    $\dfrac{dF}{dr}$ es la razón de cambio instantánea de la fuerza F cuando cambia la distancia r entre los cuerpos;
    b. $\left.\dfrac{dF}{dr}\right|_{r=10\,000} = -16$ N/km .
12. a. cuando $8 < t < 12$;
    b. $v(4) = 192$ pies/s;
    c. en $t = 20$ impacta contra el suelo
    $v(20) = -320$ pies/s .
13. a. $D_s = [0, 5]$;
    b. cuando $2 < t < 3$;
    c. $v(1) = 15$ m/s; $v(4) = -15$ m/s .